1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Общая задача линейного программирования

Пусть задана система ***m*** линейных уравнений и неравенств с ***n*** переменными:

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_{1,2\ldots n} \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad A_{m\times n}x_n = B_m \tag{1}$$

и линейная функция

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = c^T x \tag{2}$$

Необходимо найти такое решение системы $x^* = \left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)^T$, при котором линейная функция **z** принимает оптимальное (max или min) значение.

Систему (1) называют *системой ограничений*, а функцию z - *линейной целевой функцией,* или функцией цели.

Оптимальным решением или оптимальным планом ЗЛП называется такое решение $x^* = \left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)^T$ системы ограничений, при котором линейная функция **z** принимает оптимальное значение.

Если система ограничений (1) состоит из одних неравенств, то считается, что ЗЛП задана в ***стандартном*** виде; если же из одних уравнений, то - в ***каноническом*** виде; если же есть уравнения и неравенства - то в ***общем*** *виде*.

Чтобы перейти от стандартного задания к каноническому виду, вводят дополнительные неотрицательные переменные:

со знаком «+», если функция $\le b$,

со знаком «-», если функция $\ge b$.

Пример: Пусть задана общая система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 2 \\ 5x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{cc} \le & + \\ \ge & - \\ \le & + \end{array} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_{1,2,3,4,5} \ge 0 \end{cases}$$

общая задача   каноническая задача

1.2. Геометрический смысл системы неравенств

Пусть дана система линейных неравенств с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \tag{3}$$

Геометрический смысл неравенства $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$ ***- полуплоскость, все точки которой ему удовлетворяют***. Уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ определяет на плоскости OX_1X_2 прямую, которая называется ***граничной***.

В том случае, если система неравенств (3) совместна, *область ее допустимых решений (ОДР)* есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям.

Множество называется ***выпуклым***, если оно вместе со своими любыми двумя точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки. Или для любых двух точек x_1 и x_2, принадлежащих множеству X, ему принадлежат также все точки *x*, для которых справедливо равенство

$$x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

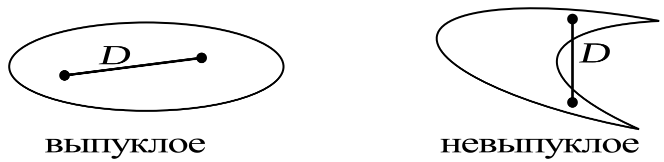


Рисунок 1 - К определению выпуклого множества

Область допустимых решений D может быть замкнутой (ограниченной), открытой (неограниченной) и пустым множеством (система ограничений противоречива) , как показано на рисунке 2 для плоскости.

Рисунок 2 - Виды областей допустимых решений (ОДР)

Доказывается, что ***ОДР ЗЛП - всегда выпуклое множество точек.***

Область допустимых решений задается с помощью системы неравенств (3).

Пример 1. Построить множество (область) ДР для системы неравенств:

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 - 3x_2 \le 3 \\ x_2 \le 6 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

Уравнения линий:

$\ell_1: \ -5x_1 + 4x_2 = 20$

x_1	0	-4
x_2	5	0

$\ell_2: \ 2x_1 + 3x_2 = 24$

x_1	0	12
x_2	8	0

$\ell_3: \ x_1 - 3x_2 = 3$

x_1	0	3
x_2	-1	0

$\ell_4: \ x_2 = 6;$

$\ell_5: \ x_1 = 0;$ $\quad \ell_6: \ x_2 = 0.$

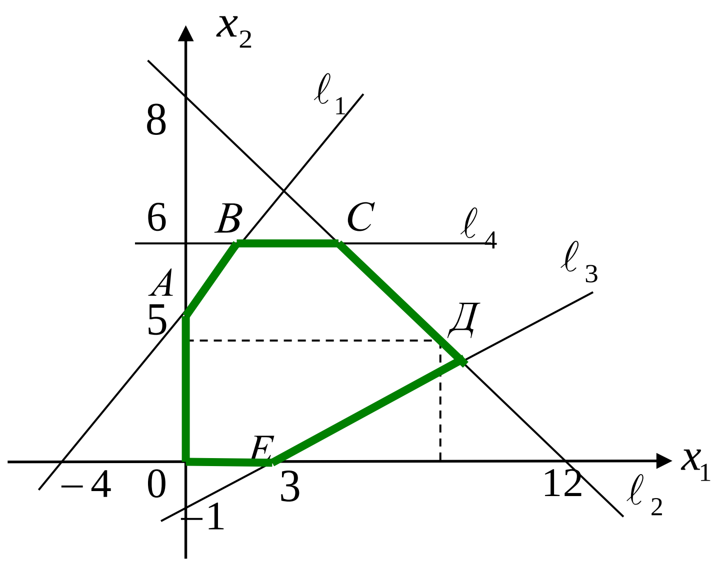


Рисунок 3 - Область допустимых решений (ОДР)

Для определения полуплоскости, которая удовлетворяет соответствующему неравенству, удобно использовать координаты точки О (0;0). Если при их подстановке в неравенство, оно является истинным, то это неравенство определяет всю полуплоскость, содержащую начало координат.

$$0+0\le 20 \quad (\text{верно}); \quad 0+0\le 24 \quad (\text{верно}); \quad 0-0\le 3 \quad (\text{верно}).$$

Точки О, А, В, С, Д, Е - вершины области решений или *угловые точки*.

Геометрический смысл системы неравенств на плоскости – это выпуклая область (многоугольник), каждая точка которой является допустимым решением ЗЛП.

По аналогии заключаем, что *ОДР в пространстве, определяемая системой неравенств с 3-мя переменными, может представлять выпуклый многогранник.*

Если систему ограничений (3) привести к каноническому виду добавлением новых переменных $x_3, x_4, ..., x_{2+m}$, например для рассматриваемой задачи

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 - 3x_2 \le 3 \\ x_2 \le 6 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 3 \\ x_2 + x_6 = 6 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases},$$

то подстановкой координат точек можно убедиться, что области ДР будут соответствовать только неотрицательные значения дополнительных переменных. При этом в угловых точках ОДР дополнительные переменные, соответствующие пересекающимся линиям, равны нулю. Например, в точке Д (см. рисунок 3), где пересекаются линии ℓ_1 и ℓ_3, нулю равны переменные x_3 и x_5.

1.3. Геометрический метод решения ЗЛП с n=2

Геометрический способ решения ЗЛП целесообразно использовать для:

- решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами;
- решения задач со многими переменными при условии, что **в *их канонической*** записи содержится ***не более двух*** свободных переменных.

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \tag{4}$$

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \;\to\; \max\left(\min\right) \tag{5}$$

Целевая функция (5) определяет на плоскости семейство параллельных прямых, каждой из которых соответствует определенное значение Z.

1.3.1. План решения ЗЛП геометрическим методом

1. Строится ОДР X. Если $X = \varnothing$, то задача не имеет решения.
2. Строим вектор градиента целевой функции

$$\overline{N} = grad\left(z\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}; \frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = \left(c_1; c_2\right)$$

- *нормальный вектор,* он указывает направление возрастания целевой функции z.

Прямая, перпендикулярная вектору $\overline{N}\left(c_1; c_2\right)$, определяет *множество равных значений* целевой функции

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = const$$

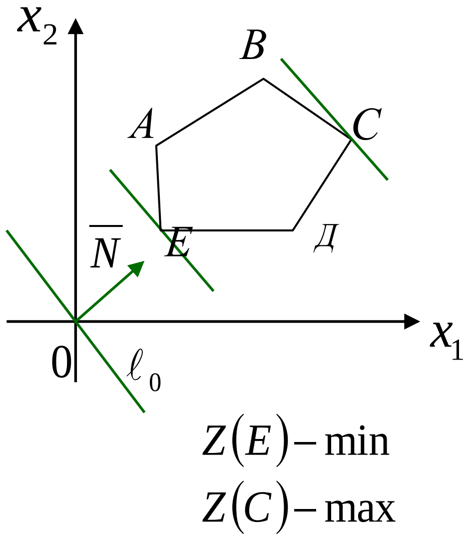
3. Строим прямую равных значений ℓ_0, проходящую через начало координат

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0.$$

В каждой точке этой прямой целевая функция равна нулю.

4. Мысленно перемещаем прямую ℓ_0 в направлении вектора $\overline{N}(c_1; c_2)$, тогда:

ближайшая угловая точка встречи ℓ_0 с областью *X* является точкой **min z**, а самая дальняя угловая точка встречи, является точкой **max z**.



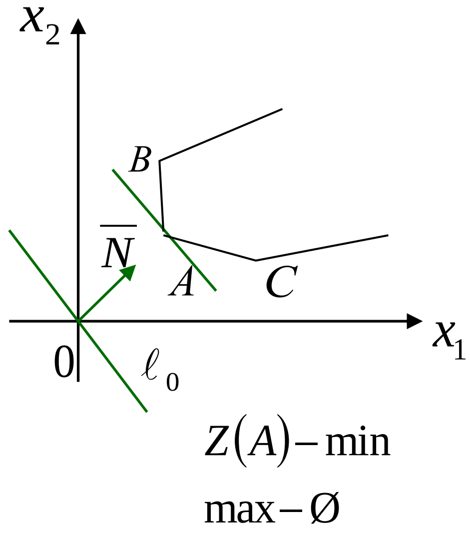


Рисунок 4 - Геометрический метод решения ЗЛП

На втором рисунке задача на **max** решений не имеет, т.е. **Z** не ограничена сверху (аналогично может быть не ограничен **min).**

<u>Замечание</u>. Если прямая ℓ_0 при перемещении совпадает с отрезком области *X*, то все точки этого отрезка являются решениями задачи. В этом случае оптимальных решений бесчисленное множество.

Поскольку, ОДР ЗЛП на плоскости представляет собой выпуклый многоугольник, то ***оптимальное решение ЗЛП находится, по крайней мере, в одной из угловых точек ОДР***.

1.3.2. Пример решения ЗЛП на плоскости (с n=2)

Пример. Определение оптимального ассортимента продукции.

Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$ которые поступают в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья – *A* и *B*. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют *9* и *13* единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ дан в таблице 1.

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на *1* ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает *2* ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны: *3* д. е. – для $П_1$ и *4* д. е. для $П_2$.

Таблица 1

Расход сырья продукции

Сырье	Расход сырья на *1* ед. продукции		Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	
A	2	3	9
B	3	2	13
Цена, д.е.	3	4	

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Построение математической модели задачи

Предположим, что предприятие изготовит

x_1 - единиц продукции $П_1$ и

x_2 - единиц продукции $П_2$.

Тогда должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 \le 9; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13; \\ x_1 - x_2 \le 1; \\ x_2 \le 2; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 единиц продукции $П_2$ составит

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max. \tag{7}$$

Решение.

Построим многоугольник решений (рис.5). Для этого в системе координат $X_1 0 X_2$ на плоскости изобразим граничные прямые:

$$2x_1 + 3x_2 = 9 \qquad (L_1);$$

$$3x_1 + 2x_2 = 13 \qquad (L_2);$$
$$x_1 - x_2 = 1 \qquad (L_3);$$
$$x_2 = 2 \qquad (L_4).$$

Для построения прямой $Z = 3x_1 + 4x_2 = 0$ строим вектор – градиент $\overline{C} = (3;4)$ и через точку 0 проводим прямую, перпендикулярную ему.

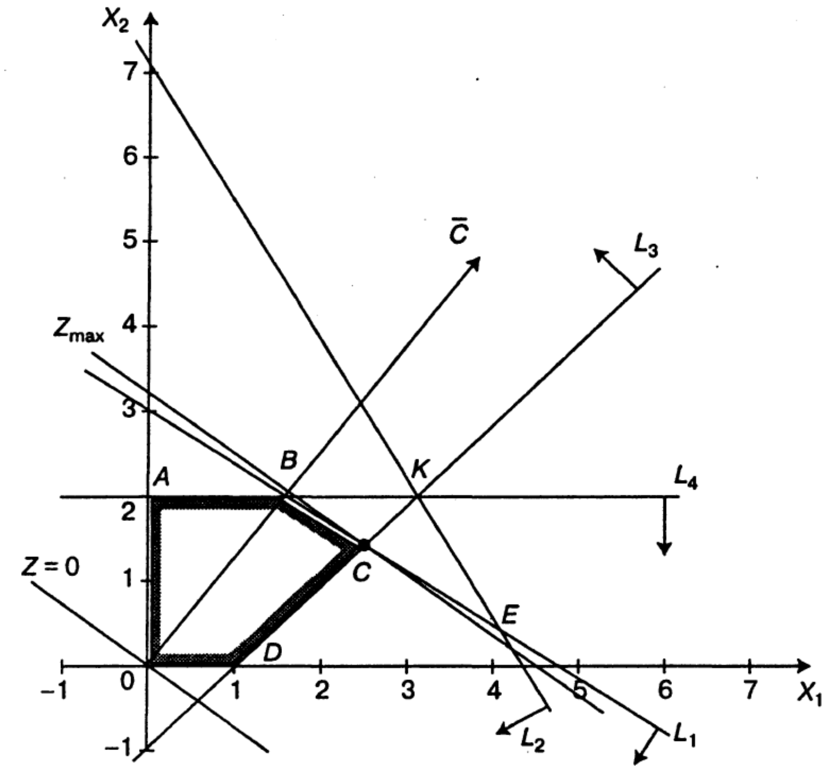


Рисунок 5 – Решение ЗЛП геометрическим способом

Построенную прямую $Z = 0$ перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{C}$. Из рис. 5 следует, что по отношению к многоугольнику решений опорной эта прямая становится в точке *C*, где функция принимает максимальное значение. Точка *C* лежит на пересечении прямых L_1 и L_3. Для определения ее координат решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9; \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_2 = 7; \\ 5x_1 = 12. \end{cases}$$

Оптимальный план задачи $x_1 = 2,4;\ x_2 = 1,4$. Подставляя значения x_1 и x_2 в линейную функцию, получим:

$$Z_{\max} = 3 \cdot 2,4 + 4 \cdot 1,4 = 12,8.$$

Полученное решение означает, что объем производства продукции $П_1$ должен быть равен *2,4* ед., а продукции $П_1$ – *1,4* ед. Доход, получаемый в этом случае, составит: $Z = 12,8$ д. е.

Задания для решения в аудитории

1. Производственному участку может быть запланировано к изготовлению на определённый плановый период времени два вида изделий: *A* и *B* . На производство единицы изделия *A* оборудование первого типа используется *1* час, оборудование второго типа - *4* часа. На производство единицы изделия *B* оборудование первого типа используется *2* часа, оборудование второго типа - *2* часа.

Фонд полезного времени первого типа оборудования составляет *120* часов, второго типа оборудования – *240* часов. Отпускная цена единицы изделия *A* составляет *4* руб., а изделия *B* - *6* руб.

Спланировать выпуск изделий A и B при условии, что план должен быть выполнен в стоимостном выражении на сумму не менее 320 руб. и оборудование первого типа должно быть загружено минимально.

Решить задачу графическим методом.

2. При производстве двух видов краски *А* и *В* предприятием используется три компонента. Расход каждого вида компонента на единицу продукции и запасы компонентов приведены в таблице Прибыль от производства краски вида *А* - 3 усл. ед., краски вида *В* – 2 усл. ед. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, решить задачу графически.

Компоненты	Расход компонента на единицу продукции		Запасы компонентов
	A	B	
1	1	2	6
2	2	1	8
3	0	1	2
Прибыль	3	2	

3. В рационе животных используется два вида кормов. Животные должны получать три вида веществ. Составить рацион кормления, обеспечивающий минимальные затраты и решить задачу графически. Данные приведены в таблице:

Питательные вещества	Содержание питательного вещества в единице корма		Необходимое количество питательных веществ
	A	B	
1	2	1	12
2	1	1	10
3	2	3	24
Цена	60	60	

4. Леспромхоз, имеющий лесопильный и фанерный цеха, столкнулся с проблемой наиболее рационального использования выделенной лесосеки. Чтобы получить 2,5 м^3 коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2,5 м^3 еловых и 7,5 м^3 пихтовой древесины. Для изготовления 100 м^2 фанеры требуется 5 м^3 еловых и 10 м^3 пихтовой древесины. Выделенная лесосека содержит 80 м^3 еловых и 180 м^3 пихтовой древесины. Согласно условиям поставок, в течение планируемого периода необходимо произвести по крайней мере 10 м^3 пиломатериалов и 1200 м^2 фанеры. Доход с 1 м^3 пиломатериалов составляет 80000 руб., а со 100 м^2 фанеры - 300000 руб. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, решить задачу графически.

1.4. Анализ моделей на чувствительность

В рамках анализа выявляется чувствительность полученного оптимального решения к изменениям параметров исходной модели.

При таком анализе всегда рассматривается комплекс линейных оптимизационных моделей. Это придает модели определенную динамичность, позволяющую исследователю проанализировать влияние возможных изменений исходных условий на полученное ранее оптимальное решение.

Рассмотрим *основные задачи анализа на чувствительность* на приведенном выше примере.

1.4.1. Анализ изменений запасов ресурсов

Данный анализ призван ответить на два вопроса:

1. На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции Z?
2. На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции Z?

Ограничение линейной модели называют **связывающим (активным)** если прямая ему соответствующая проходит через оптимальную точку. В противном случае – ограничение **несвязывающее (неактивное).**

На рис.5 связывающими ограничениями являются ограничения, представленные прямыми L_1 и L_3. Ограничение L_1 определяет запасы сырья *A*. Ограничение L_3 определяет соотношение спроса на выпускаемую продукцию.

Ресурс, количество которого определяет активное ограничение, называется **дефицитным**, так как он используется полностью. В противном случае, ресурс - **недефицитный** (т.е. имеющийся в некотором избытке).

В нашем примере несвязывающими ограничениями являются L_2 и L_4. Следовательно, сырье *В* – недефицитный ресурс, т. е. имеется в избытке, а спрос на продукцию $П_2$ не будет удовлетворен полностью (в таблице — ресурсы 2 и 4).

При анализе модели на чувствительность по правым частям ограничений определяются:

1) предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение;

2) предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденное ранее оптимальное значение целевой функции.

В нашем примере сырье *А* и соотношение спроса на выпускаемую продукцию $П_1$ и $П_2$ являются дефицитными ресурсами (в табл.1 – ресурсы 1, 3).

Рассмотрим сначала ресурс – сырье *А.* На рис. 6 при увеличении запаса этого ресурса прямая L_1 перемещается вверх, параллельно самой себе, до точки *К,* в которой пересекаются линии ограничений L_2, L_3 и L_4. В точке *К* ограничения (2), (3) и (4) становятся связывающими; оптимальному решению при этом соответствует точка *К,* а множеством допустимых решений становится многоугольник $АКДО$. В точке *К* ограничение (1) (для ресурса *А)* становится избыточным, так как любой дальнейший рост запаса соответствующего ресурса не влияет ни на пространство решений, ни на оптимальное решение.

Таким образом, объем ресурса *А* не следует увеличивать сверх того предела, когда соответствующее ему ограничение (1) становится избыточным, т. е. прямая (1) проходит через новую оптимальную точку *K*. Этот предельный уровень определяется следующим образом. Устанавливаются координаты точки *K*, в которой пересекаются прямые L_2, L_3 и L_4 т. е. находится решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 13; \\ x_1 - x_2 = 1; \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

В результате получается $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$. Затем, путем подстановки координат точки *K* в левую часть ограничения (1), определяется максимально допустимый запас ресурса *А:*

$$2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12.$$

Рисунок 7 иллюстрирует ситуацию, когда рассматривается вопрос об изменении соотношения спроса на продукцию П1 и П2.

Новой оптимальной точкой становится точка *E,* где пересекаются прямые L_1 и L_2. Координаты данной точки находятся путем решения системы уравнений (1) и (2) следующим образом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9; \\ 3x_1 + 2x_2 = 13. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5/3\, x_2 = 1/3; \\ -5/2\, x_1 = -21/2. \end{cases}$$

В результате получается $x_1 = 4,2;$ $x_2 = 0,2$, причем суточный спрос на продукцию $П_1$ не должен превышать спрос на продукцию $П_2$ на величину $x_1 - x_2 = 4,2 - 0,2 = 4$ ед.

Дальнейшее увеличение разрыва в спросе на продукцию $П_1$ и $П_2$ не будет влиять на оптимальное решение.

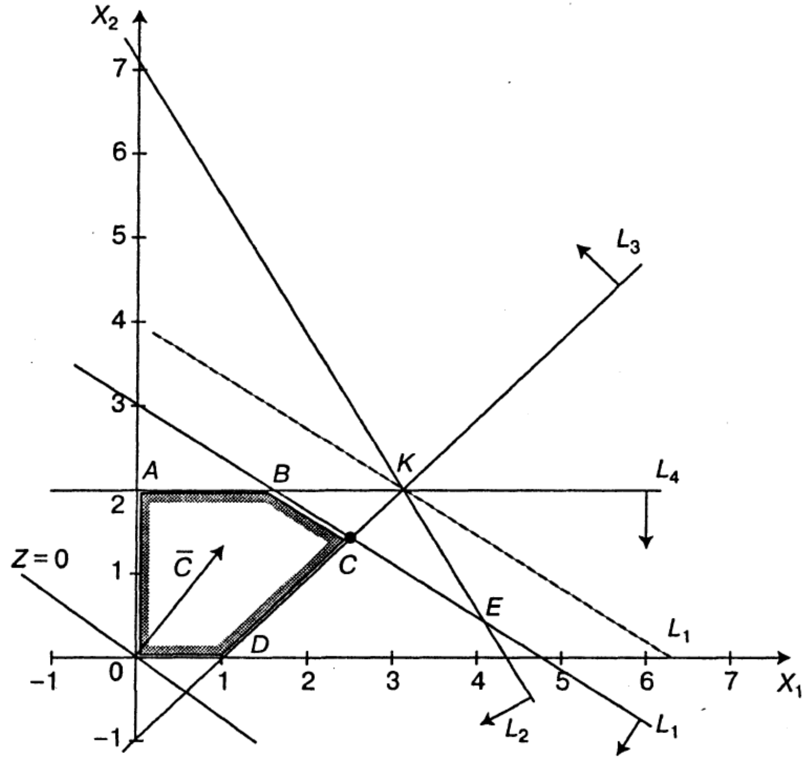


Рисунок 6 - Геометрическая интерпретация решения задачи линейного программирования (изменение ресурса *А)*

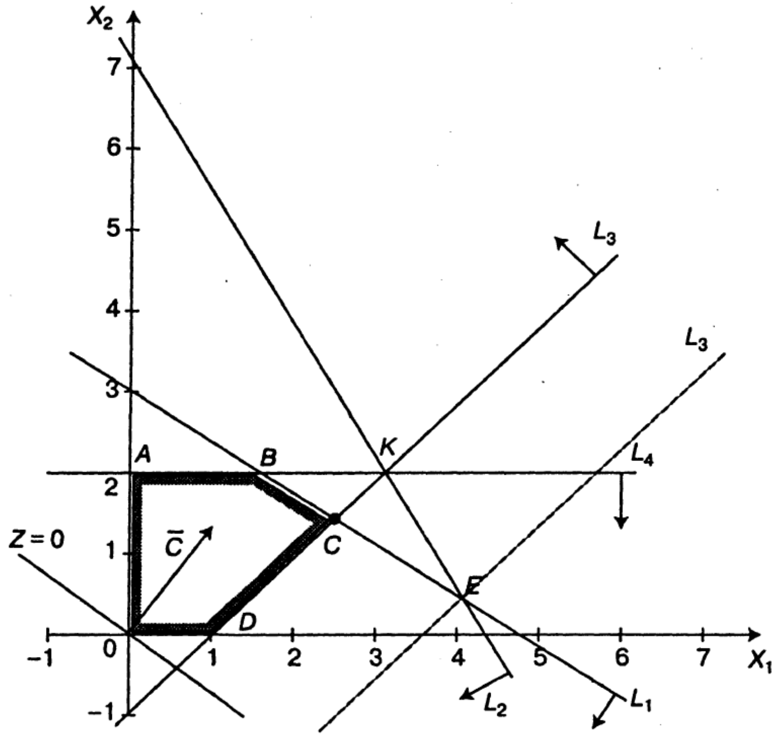


Рисунок 7 - Геометрическая интерпретация решения ЗЛП
(изменение спроса на продукцию)

Рассмотрим вопрос об уменьшении правой части несвязывающих ограничений.

Ограничение (4) $x_2 \le 2$ фиксирует предельный уровень спроса на продукцию $П_2$. Из рис. 5 следует, что, не изменяя оптимального решения, прямую L_4 *(AB)* можно опускать вниз до пересечения с оптимальной точкой *C*. Так как точка С имеет координаты $x_1 = 2,4$; $x_2 = 1,4$, уменьшение спроса на продукцию $П_2$ до величины $x_2 = 1,4$ никак не повлияет на оптимальность ранее полученного решения.

Рассмотрим ограничение (2) $3x_1 + 2x_2 \le 13$, которое представляет собой ограничение на недефицитный ресурс – сырье *B*. И в этом случае правую часть – запасы сырья *B* – можно уменьшать до тех пор, пока прямая L_2 не достигнет точки *C*. При этом правая часть ограничения (2) станет равной $3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 2,4 + 2 \cdot 1,4 = 10$, что позволяет записать это ограничение в виде: $3x_1 + 2x_2 \le 10$. Этот результат показывает, что ранее полученное оптимальное решение не изменится, если суточный запас ресурса *B* уменьшить на *3* ед.

1.4.2. Определение наиболее выгодного ресурса

Какому из ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств?

Обозначим ценность дополнительной единицы ресурса *i* через y_i. Величина y_i определяется из соотношения

$$y_i = \frac{\textit{Максимальное приращение } Z}{\textit{Максимально допустимый прирост ресурса } i}.$$

Результаты расчета представлены в таблице 2:

Таблица 2

Ресурс	Тип ресурса	Максимальное изменение запаса	Максимальное увеличение дохода от изменения ресурса,	Ценность дополнительной единицы ресурса

		ресурса, ед.	у. д. е.	
1 (A)	Дефицитный	$12-9=+3$	$17-12{,}8=+4{,}2$	$4{,}2/3=1{,}4$
2 (B)	Недефицит-ный	$10-13=-3$	$12{,}8-12{,}8=0$	$0/(-3)=0$
3	Дефицитный	$4-1=+3$	$13{,}4-12{,}8=+0{,}6$	$0{,}6/3=0{,}2$
4	Недефицит-ный	$1{,}4-2=-0{,}6$	$12{,}8-12{,}8=0$	$0/(-0{,}6)=0$

Полученные результаты свидетельствуют о том, что дополнительные вложения в первую очередь следует направить на увеличение ресурса A и лишь затем – на формирование соотношения спроса на продукцию $П_1$ и продукцию $П_2$. Что касается недефицитных ресурсов, то их объем увеличивать не следует, а на их запасах можно сэкономить.

1.4.3. Определение пределов изменения коэффициентов целевой функции

Анализ позволяет ответить на вопросы:

1) каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?

2) на сколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным, и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?

Ответим на поставленные вопросы на нашем примере.

Рассматривая первый вопрос, обозначим через c_1 и c_2 доходы предприятия от продажи единицы продукции $П_1$ и $П_2$ соответственно. Тогда целевую функцию можно представить в следующем виде:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

На рис. 5 видно, что *при увеличении* c_1 *или уменьшении* c_2 *прямая, представляющая целевую функцию Z, вращается (вокруг точки C) по часовой стрелке.* Если же c_1 уменьшается или c_2 увеличивается, эта прямая вращается в противоположном направлении – против часовой стрелки. Таким образом, точка *C* будет оставаться оптимальной точкой до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых для ограничений (1) и (3).

Когда наклон прямой *Z* станет равным наклону прямой L_1, получим две альтернативные оптимальные угловые точки – *C* и *B*. Аналогично, если наклон прямой *Z* станет равным наклону прямой для ограничения (3), будем иметь альтернативные оптимальные угловые точки *C* и *D*. Наличие альтернативных оптимумов свидетельствует о том, что одно и то же оптимальное значение *Z* может достигаться при различных значениях переменных x_1 и x_2. Как только наклон прямой выйдет за пределы указанного выше интервала c_1, получим некоторое новое оптимальное решение.

Рассмотрим на нашем примере, каким образом можно найти допустимый интервал изменения c_1, при котором точка *C* остается оптимальной. Исходное значение коэффициента $c_2 = 4$ оставим неизменным. На рис.5 видно, что *значение* c_1 *можно уменьшать до тех пор, пока прямая Z не совпадет с прямой* L_1 *(отрезок BC).*

Это крайнее минимальное значение коэффициента c_1 можно определить из равенства углов наклонов прямой *Z* прямой L_1. Так как тангенс угла наклона для прямой *Z* равен $-c_1/4$, а для прямой (1) равен $-2/3$, то минимальное значение c_1 определим из равенства $c_1/4 = 2/3$, откуда $\min c_1 = 8/3$.

На рис.5 видно, что значение c_1 можно увеличивать беспредельно, так как прямая *Z* при $c_2 = 4$ и $c_1 \to +\infty$ не совпадает с прямой L_3 (отрезок *DC*) и, следовательно, точка *C* при всех значениях коэффициента $c_1 \geq 8/3$ будет единственной оптимальной.

Как только коэффициент c_1 становится меньше $8/3$, оптимум смещается в точку *B*.

Можно заметить, что, как только коэффициент c_1 оказывается меньше $8/3$, ресурс *3* становится недефицитным, а ресурс *4* – дефицитным. Для предприятия это означает следующее: если доход от продажи единицы продукции Π_1 станет меньше $8/3$ д. е., то наиболее выгодная производственная программа предприятия должна предусматривать выпуск максимально допустимого количества продукции Π_2 (полностью удовлетворять спрос на продукцию Π_2).

При этом соотношение спроса на продукцию Π_1 и Π_2 не будет лимитировать объемы производства, что обусловит недефицитность ресурса (3). Увеличение коэффициента c_1 свыше $8/3$ д. е. не снимает проблему дефицита ресурсов (1) и (3). Точка *C* – точка пересечения прямых L_1 и L_3 остается все время оптимальной.

Задания для решения в аудитории.

Провести анализ моделей на чувствительность.

1. Фирма выпускает два вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы даны в таблице

Исходный продукт	*Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого*		*Запас, кг.*
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более, чем на 100 кг. Кроме того, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг. В сутки. Розничная цена 1 кг сливочного мороженого 16 р., шоколадного 14 р.

Какое количество мороженого каждого виды должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

2. Фермер на своем участке выращивает огурцы и помидоры. Чтобы не потерять урожай он использует азотные фосфатные и калийные удобрения. Чтобы удобрить один гектар огурцов ему необходимо 20 ед. азотных удобрений, 40 – калийных, 10 – фосфатных, 20 – навоза; помидоров – 10 – калийных, 15 – фосфатных, 10 – навоза. Запасы удобрений следующие: азотных – 120, калийных – 320, фосфатных 160, навоза – 180. Прибыль с 1 га площади, засаженной огурцами, – 5000 у.д.е., а помидорами – 3000 у.д.е. Сколько гектаров огурцов и помидоров необходимо обработать для получения максимальной прибыли?

1.5. Геометрическое решение ЗЛП с n>2

Геометрическим способом можно также решать задачи линейного программирования **с числом переменных более двух**, при условии, что в их **канонической записи содержится не более двух свободных переменных** $n-m\le 2$.

Рассмотрим этот случай на примере:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_i \ge 0, \quad i=\overline{1,4} \end{cases} \tag{8}$$

$$z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max \tag{9}$$

Перепишем систему (8) в матричном виде:

$$A\cdot x = b \qquad z = c\cdot x \to \max$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad z = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Пусть $x_B = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \end{pmatrix}^T$ - базисные переменные, а $x_F = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$ - свободные, при этом обязательно, чтобы выполнялось условие $\det A_B \ne 0$.

$$A_B x_B + A_F x_F = b;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$z = c \cdot x = c_B x_B + c_F x_F\,;$$

$$z = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Выразим базисные переменные через свободные

$$A_B \cdot x_B = b - A_F \cdot x_F\,; \qquad x_B = A_B^{-1}\left(b - A_F x_F\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4 \\ -0{,}3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1{,}4 \\ -0{,}5 & 1{,}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Учитывая неотрицательность переменных, из последнего выражения получим новую систему ограничительных неравенств относительно только свободных переменных

$$\begin{cases} 1{,}4 - 1{,}4x_3 \ge 0 \\ -0{,}3 - 0{,}5x_2 + 1{,}3x_3 \ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_3 \le 1 \\ -5x_2 + 13x_3 \ge 3 \end{cases}.$$

Подставив выражения (10) в целевую функцию (9), выразим ее также только через $x_F = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$

$$z = c_B A_B^{-1} b + \left(c_F - c_B A_B^{-1} A_F \right) x_F$$

$$z = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,4 - 1,4x_3 \\ -0,3 - 0,5x_2 + 1,3x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$z = 5,9 - 1,5x_2 - 5,9x_3 \to \max \qquad (11)$$

Таким образом, исходная задача ЛП многих переменных сведена к задаче двух переменных

$$\begin{cases} x_3 \le 1 \\ -5x_2 + 13x_3 \ge 3 \end{cases}$$

$$z = 5,9 - 1,5x_2 - 5,9x_3 \to \max,$$

геометрическая интерпретация решения которой представлена на рисунке 8.

Согласно рисунку целевая функция принимает максимальное значение в точке А с координатами (0;0,23):

$$\begin{cases} L_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -5x_2 + 13x_3 = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 3/13 = 0,23 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Максимальное значение целевой функции

$$z = 5,9 - 5,9 \cdot 0,23 \approx 4,54.$$

Для отыскания оптимального плана исходной задачи подставляем в преобразованную систему (10) x_2, x_3.

Окончательно получаем $x^T = \left(1,078;\ 0;\ 0,23;\ 0,001\right)$.

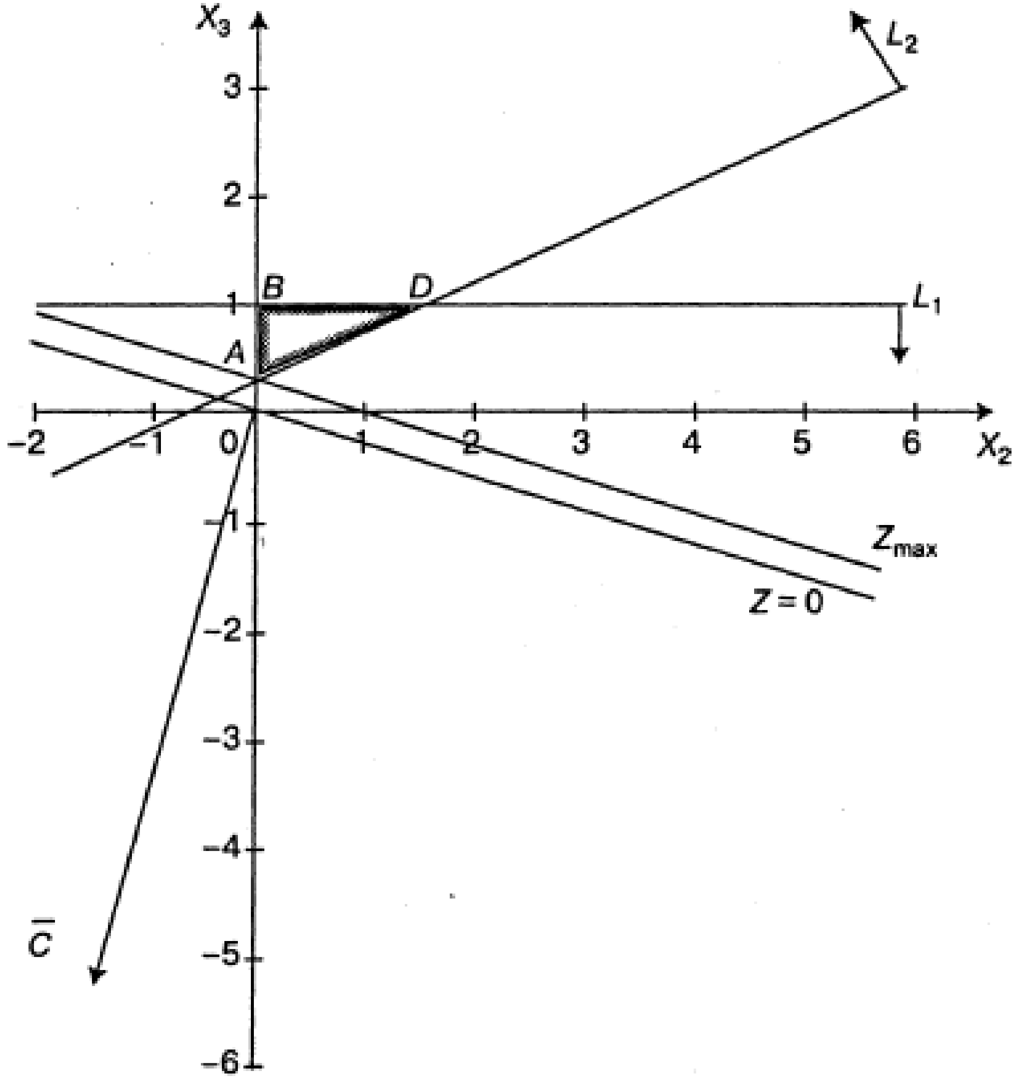


Рисунок 8. Геометрическая интерпретация решения ЗЛП с n>2

1.6. Введение в симплекс-метод решения ЗЛП

Симплекс – простейший, выпуклый многогранник. На плоскости это треугольник, в пространстве – тетраэдр и т.д.

Графический метод решения ЗЛП имеет существенное ограничение по числу варьируемых переменных (свободных переменных в канонической системе ограничений). Таких переменных должно быть не более двух, чтобы имелась возможность рассматривать задачу на плоскости.

Симплекс-метод призван снять это ограничение.

Пусть требуется найти максимум целевой функции:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max, \tag{12}$$

а система ограничений содержит $\boldsymbol{m}$ неравенств относительно $\boldsymbol{n}$ переменных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{13}$$

$$x_{1..n} \ge 0$$

Добавив $\boldsymbol{m}$ неотрицательных переменных $x_{n+1} \ge 0, \ldots, x_{n+m} \ge 0$ по числу неравенств, приведем задачу к каноническому виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \tag{14}$$

$$x_{1\ldots n+m} \geq 0$$

Всего получается ***n+m*** переменных. Задача в этом случае принимает простейший матричный вид

$$F_{\max} = c \cdot x, \quad \text{где} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n & 0_{n+1} & \ldots & 0_{n+m} \end{pmatrix}; \tag{15}$$

$$x_{1\ldots n+m} \geq 0.$$

Основные положения ЛП для случая n переменных

— ОДР ЗЛП представляет собой выпуклое множество – многогранник в n-мерном пространстве (n - количество исходных переменных).

— Если ЗЛП имеет оптимальное решение, то оно соответствует хотя бы одной угловой точке многогранника решений (ОДР).

— *Угловая точка многогранника в n-мерном пространстве является точкой пересечения* ***n*** *различных гиперплоскостей, каждая из которых задается одним уравнением системы ограничений (14) — в точности, как три плоскости образуют трехмерный угол.*

— *В угловой точке* ***n*** *переменных равны нулю – эти переменные называются* ***свободными*** $x_F = 0$*, а само решение относительно оставшихся ненулевых* ***m*** *переменных* $x_B \geq 0$ *–* ***базисным****.*

—Отыскать оптимальное решение можно перебором всех базисных допустимых ($x_{n+1,\ldots,n+m} \geq 0$) решений - угловых точек многогранника, вычисляя в них значение целевой функции z и выбирая наилучшее.

Число сочетаний $C_q^p = \dfrac{q!}{p!(q-p)!}$.

Всего угловых точек достаточно много $C_{n+m}^n = \dfrac{(n+m)!}{n!m!}$, при этом лишь часть из них принадлежат многограннику допустимых решений.

Очевидно, что метод простого перебора - не самый лучший.

Симплекс-метод представляет собой алгоритм, по которому из некоторой начальной допустимой угловой точки многогранника осуществляется переход в соседний угол вдоль одного из n ребер.

Дж. Данциг предложил двигаться вдоль того ребра, которое гарантирует увеличение значения целевой функции. Постепенно двигаясь, достигнем особого угла, для которого уже все направления станут недопустимыми, а z примет оптимальное значение.

1.7. Геометрическая интерпретация симплекс-метода

Рассмотрим пример, ОДР которого представлена на рисунке 9.

Для этого примера m=6, n=2. Всего существует

$$C_{n+m}^n = \frac{(n+m)!}{n!m!}; \qquad C_{2+6}^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

всевозможных углов, из них только 6 соответствуют допустимым решениям.

Алгоритм решения задачи:

— определить способ вычисления **начального допустимого** решения задачи.

— определить **признак оптимальности,** с помощью которого можно проверить, не является ли это решение оптимальным.

— Если нет, то нужно определить по какому из n ребер многогранника следует двигаться до соседней угловой точки, приближающей нас к цели.

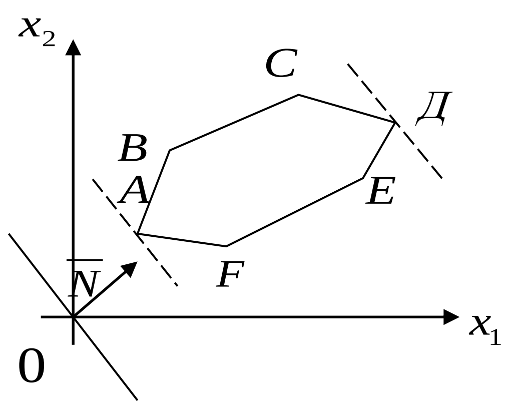
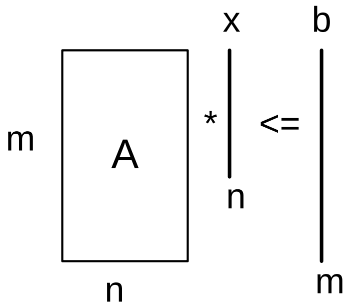


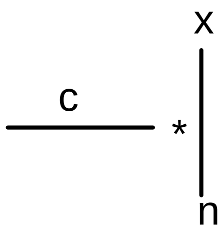
Рисунок 9 - ОДР с m=6+2 ограничениями

1.8. Алгоритм вычисления начального допустимого решения

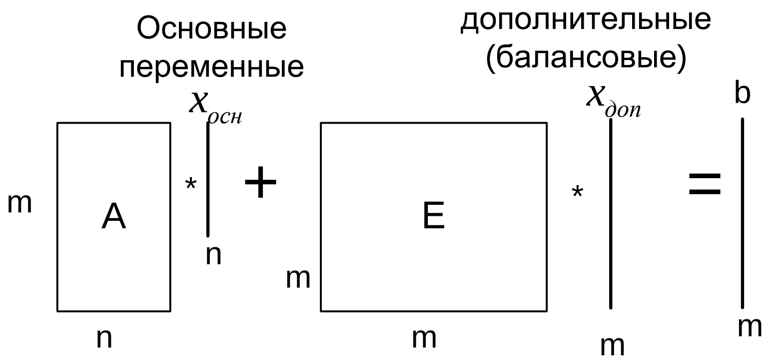
Формально алгоритм вычисления **начального допустимого** решения можно представить в виде матричных уравнений

$$A_{mn} \cdot x_n \le b_m \qquad\qquad z = c_n \cdot x_n \to \max$$

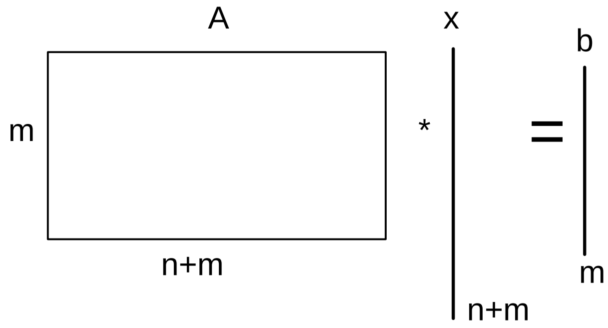




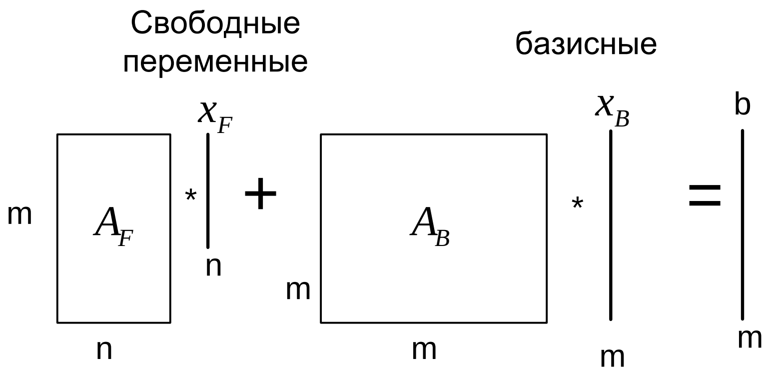
$$A_{осн} \cdot x_{осн} + E \cdot x_{доп} = b; \qquad z = c_{осн} x_{осн} + c_{доп} x_{доп} \to \max$$



$$A \cdot x = b \tag{16}$$



$$A_B x_B + A_F x_F = b; \qquad z = c_B x_B + c_F x_F \to \max$$



$$\det\left(A_B\right) \neq 0$$

$$\begin{cases} x_B + A_B^{-1} A_F x_F = A_B^{-1} b \\ z - \left(c_F - c_B A_B^{-1} A_F\right) x_F = c_B A_B^{-1} b. \end{cases} \qquad (17)$$

Поскольку свободные переменные в текущей угловой точке равны нулю $x_F = 0$, то правая часть первого выражения (17) позволяет определить является ли решение допустимым $x_B = A_B^{-1}b \geq 0$, а правая часть второго выражения (17) представляет собой значение целевой функции в этом угле $z = c_B A_B^{-1} b = z_o$.

В задаче ЛП на максимум при решении (17) в качестве базисных переменных удобно взять дополнительные $x_B = x_{доп}$, $x_F = x_{осн}$, тогда $A_B = E$, $A_F = A$ и выражение (17) примет вид

$$\begin{cases} x_B + A \cdot x_F = b \\ z - c \cdot b = 0. \end{cases} \qquad (18)$$

Все $b_i \geq 0$, поэтому данное решение является допустимым.

Выражения (18) удобно записывать в виде таблицы, где жирная линия соответствуют знаку "=" равно.

Таблица 1

$b \backslash f$	x_1	...	x_j	...	x_n	b_i
x_{n+1}	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...	...
x_{n+i}	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
...	...	...	...	...	...	...
x_{n+m}	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
$F_{\max}$	$-c_1$	...	$-c_j$	...	$-c_n$	F_o

В ходе решения задачи симплекс-методом, можно установить, не являются ли условия **противоречивыми**, т.е. алгоритм симплекс - метода устанавливает является ли задача разрешимой.

1.9. Критерий оптимальности симплекс - метода

Пусть целевая функция в некоторой вершине многогранника выражается через свободные переменные (17)

$$F_{\max} - \left(c_F - c_B A_B^{-1} A_F\right) x_F = c_B A_B^{-1} b \to \max$$

$$\text{например,} \qquad F_{\max} = 3x_1 + 5x_2 - 2x_5 + 12 \to \max, \tag{19}$$

или $$F_{\max} - 3x_1 - 5x_2 + 2x_5 = 12 \to \max,$$

$$\text{где } x_F = \left(x_1 \quad x_2 \quad x_5\right)^T \equiv \left(0 \quad 0 \quad 0\right)^T.$$

Очевидно, что увеличивая переменные x_1 и x_2, которые в данной вершине многогранника нулевые, можно увеличить функцию F. Увеличивая же переменную x_5, целевая функция будет только уменьшаться. Поскольку увеличение F будет происходить быстрее при изменении x_2, то именно эту свободную переменную следует на очередном этапе сделать базисной.

Таким образом, критерием оптимальности решения ЗЛП симплекс-методом являются условия (для табличного представления):

1. **Задача на max:** если в выражении целевой функции $F_{\max}$ через свободные переменные **отсутствуют отрицательные коэффициенты** при свободных переменных, то решение оптимальное.

2. **Задача на min:** если в выражении функции $Z_{\min}$ через свободные переменные **отсутствуют положительные коэффициенты** при них, то решение оптимальное.

1.10. Алгоритм решения ЗЛП симплекс-методом

1.10.1. Выбор исключаемой базовой переменной

Пусть по выражению целевой функции F через свободные переменные было установлено, что переменную x_2 можно увеличивать, а потому ее следует сделать базовой. Значит, одну из базовых следует, наоборот, перевести в свободные. Какую?

Рассмотрим этот вопрос на примере системы ограничений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 8 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_4 + x_5 = 9 \end{aligned} \qquad (20)$$

Из (19) следует, что x_2 можно увеличивать, но только до тех пор, пока базовые переменные остаются неотрицательными. Так в системе ограничений (20) базовые переменные $x_3 = 8$; $x_4 = 9$, а свободные равны нулю $x_1 = x_2 = x_5 = 0$. Из первого уравнения видно, что x_2 можно увеличивать до $x_2 = 4$, но тогда во втором получится, что $x_4 = 9 - 3x_2 = -3$, а значит, решение не будет допустимым. Поэтому *увеличение x_2 ограничено минимальным отношением свободного члена к коэффициенту при включаемой свободной переменной*

$$x_2 = \min\left(8/2 ; 9/3 \right) = 3.$$

Это правило учитывает лишь положительные отношения, т.к. в противном случае увеличение включаемой свободной переменной приводило бы только к допустимому увеличению базовой переменной.

Как выполнять пересчет «новой» системы (таблицы) по формулам (17)?

Рассмотрим на примере следующей системы типа (18)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$F_{\max} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0 \tag{22}$$

$$\begin{cases} x_B + Ax_F = b \\ F_{\max} - cx_F = 0 \end{cases}, \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T; \quad x_F = \begin{pmatrix} x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T.$$

Допустим необходимо поменять местами x_2 и x_5. Выполним над выражением (21) преобразования (17)

$$A_B x_B + A_F x_F = b; \qquad \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \\ a_{31} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{22}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a_{32} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12}/a_{22} & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32}/a_{22} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1}A_F=\begin{pmatrix}1 & -a_{12}/a_{22} & 0\\ 0 & 1/a_{22} & 0\\ 0 & -a_{32}/a_{22} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ a_{21} & 1\\ a_{31} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}-a_{21}a_{12}/a_{22} & -a_{12}/a_{22}\\ a_{21}/a_{22} & 1/a_{22}\\ a_{31}-a_{21}a_{32}/a_{22} & -a_{32}/a_{22}\end{pmatrix} \quad (24)$$

$$A_B^{-1}b=\begin{pmatrix}1 & -a_{12}/a_{22} & 0\\ 0 & 1/a_{22} & 0\\ 0 & -a_{32}/a_{22} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1-b_2a_{12}/a_{22}\\ b_2/a_{22}\\ b_3-b_2a_{32}/a_{22}\end{pmatrix} \quad (25)$$

Для «нового» базового вектора получим

$$x_B+A_B^{-1}A_Fx_F=A_B^{-1}b$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_5\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11}-a_{21}a_{12}/a_{22} & -a_{12}/a_{22}\\ a_{21}/a_{22} & 1/a_{22}\\ a_{31}-a_{21}a_{32}/a_{22} & -a_{32}/a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_4\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1-b_2a_{12}/a_{22}\\ b_2/a_{22}\\ b_3-b_2a_{32}/a_{22}\end{pmatrix} \quad (26)$$

В выражение целевой функции

$$F_{\max}+\begin{pmatrix}-c_1 & -c_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_4\\ x_5\end{pmatrix}=0$$

подставим x_5 из (26)

$$x_5=-a_{21}/a_{22}\,x_4-1/a_{22}x_2+b_2/a_{22}\,,$$

получим

$$F_{\max}-c_1x_4+c_2\,a_{21}/a_{22}\,x_4+c_2/a_{22}\,x_2-c_2b_2/a_{22}=0$$

$$F_{\max} - \left(c_1 - c_2\, a_{21}/a_{22} \quad -c_2/a_{22} \right) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_2\, b_2/a_{22} \qquad (27)$$

Выражения (26) и (27) позволяют перейти к новой симплекс-таблице, в которой $x_B = \left(x_1 \quad x_5 \quad x_3 \right)^T$; $x_F = \left(x_4 \quad x_2 \right)^T$.

Теперь можно формализовать алгоритм симплекс-метода.

Рассмотрим решение ЗЛП на максимум.

1.10.2. Алгоритм решения ЗЛП симплекс-методом

1) Переходим к канонической форме, введением вспомогательных положительных переменных.
2) Выбираем базисные переменные
3) Выражаем их через свободные (17). Если решение недопустимое (есть отрицательный свободный член: $\exists i \to x_{B_i} = A_B^{-1} b_i < 0$), то возврат к п. 2.
4) Составляем симплекс таблицу (см. табл.1).
5) По коэффициентам последней строки проверяем текущее решение на оптимальность (см. выше). Если оно оптимально (в строке $F_{\max}$ нет отрицательных элементов), то остановка алгоритма $F_{\max} = F_{\max}^*$.
6) Если в строке $F_{\max}$ *есть отрицательные* элементы, то функцию $F_{\max}$ можно увеличивать. Для этого *по строке $F_{\max}$ выбирают наибольший по модулю отрицательный элемент.* **Столбец**, в котором стоит данный элемент, **называется разрешающим**.

7) Для определения **разрешающей строки** составляют отношения свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца и выбирают минимальное:

$$\min = \left\{ \frac{b_1}{a_{1j}}; \frac{b_2}{a_{2j}}; \ldots \frac{b_i}{a_{ij}}; \ldots \frac{b_m}{a_{mj}} \right\} \text{ (не делят на ноль)}$$

Элемент, стоящий на пересечении разрешающей строки и столбца, **называется разрешающим элементом.**

8) Выполняем переход к «новой» симплекс-таблице, см. (26) и (27):

Пусть *i*-я строка, *j*-й столбец и элемент a_{ij} - разрешающие, тогда

— *Меняем местами переменные* x_j *и* x_{n+i}.

— *Разрешающий элемент заменяем на обратный ему* $a_{ij}^* = 1/a_{ij}$.

— *Остальные элементы разрешающей строки* a_{il} *делим на разрешающий элемент* $a_{il}^* = a_{il}/a_{ij}$.

— *Остальные элементы разрешающего столбца* a_{kj} *делим на разрешающий элемент, взятый с противоположным знаком* $a_{kj}^* = -a_{kj}/a_{ij}$.

— *Все остальные элементы таблицы вычисляем по правилу прямоугольника:*

$$\begin{array}{ccc} a_{lk} & & a_{lj} \\ & & \\ a_{ik} & & a_{ij} \end{array}$$

$$a_{kl}^{*} = \frac{a_{kl}a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{lj}}{a_{ij}} = a_{kl} - \frac{a_{ik} \cdot a_{lj}}{a_{ij}}$$

9) Переходим к пункту 5.

Замечания:

1. Аналогично решается задача на минимум, но теперь следует избавляться от *положительных элементов в строке* $Z_{\min}$. *Если в этой строке нет положительных элементов, то задача решена*.
2. Если в разрешающем столбце нет положительных элементов, то нельзя составить необходимые отношения и задача не разрешима.
3. Если первоначальное базисное решение не является допустимым $\left(\text{при } b_i < 0\right)$, то применяется метод искусственного базиса (см. ниже).

Пример: Решить задачу при помощи симплекс – таблиц.

$$\begin{cases} x_1 \le 10 \\ x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 20 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 10 \\ x_2 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 20 \\ x_{1,\dots 5} \ge 0 \end{cases} \quad x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

$$F_{\max} = 3x_1 + 5x_2 \to \max \qquad F_{\max} - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Симплекс – таблица №1

b \ f	x_1	x_2	b_i
x_3	1	0	10
x_4	0	1	8
x_5	1	2	20
$F_{\max}$	-3	-5	0

$$F_{\max}(0;0) = 0; \qquad x = (0;0;10;8;20)^T$$

$$\min = \left\{ \frac{8}{1}; \frac{20}{2} \right\} = 8$$

Симплекс – таблица №2

$b \backslash f$	x_1	x_4	b_i
x_3	1	0	10
x_2	0	1	8
x_5	1	-2	4
$F_{\max}$	-3	5	40

$$F_{\max}(0;8)=40; \qquad x=(0;8;10;0;4)^T$$

$$\min=\left\{\frac{10}{1};\frac{4}{1}\right\}=4$$

Симплекс – таблица №3

$b \backslash f$	x_5	x_4	b_i
x_3	-1	2	6
x_2	0	1	8
x_1	1	-2	4
$F_{\max}$	3	-1	52

$$F_{\max}(4;8)=52; \qquad x=(4;8;6;0;0)^T$$

$$\min=\left\{\frac{6}{2};\frac{8}{1}\right\}=3$$

Симплекс – таблица №4

$b \backslash f$	x_5	x_3	b_i
x_4	-1/2	1/2	3
x_2	1/2	-1/2	5
x_1	0	1	10

F_{max}	5/2	1/2	55

$$x^* = (10;5;0;3;0)^T \qquad F^*_{max}(10;5) = 55$$

Так как в строке F_{max} нет отрицательных коэффициентов, то последнее решение является оптимальным.

Задания для решения в аудитории

1. При производстве двух видов краски *A* и *B* предприятием используется три компонента. Расход каждого вида компонента на единицу продукции и запасы компонентов приведены в таблице Прибыль от производства краски вида *A* - 3 усл. ед., краски вида *B* – 2 усл. ед. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, решить задачу симплекс-методом.

Компоненты	Расход компонента на единицу продукции		Запасы компонентов
	A	B	
1	1	2	6
2	2	1	8
3	0	1	2
Прибыль	3	2	

2. При производстве двух видов продукции используются три вида сырья. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимум прибыли и решить задачу симплекс-методом. Данные приведены в таблице:

Виды сырья	Расход сырья на единицу продукции	Запасы сырья

	A	B	
1	2	1	20
2	1	1	12
3	1	3	30
Прибыль	40	50	

1.11. Метод искусственного базиса (М - метод)

Обычно при решении задачи ЛП *на минимум*, после приведения системы ограничений к каноническому виду нельзя сразу получить допустимое базисное решение (т.е. если знак неравенства $\geq$ или $b_i < 0$), то применяют метод искусственного базиса. Он заключается в следующем:

1) вводят искусственные неотрицательные переменные $y_1, y_2, ..., y_m$ и прибавляют их к левым частям уравнений так, чтобы из них можно было выделить базис.

2) вводят новую целевую функцию с дополнительным слагаемым

$$Z_{\min} = c^T x + M \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_m) \to \min, \text{ для задачи на min, или}$$

$$F_{\max} = c^T x - M \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_m) \to \max, \text{ для задачи на max,}$$

где $M >> 0$ - произвольное большое число. При оптимизации дополнительное М-слагаемое является наиболее значимым, что требует первоочередного перевода искусственных переменных из разряда базисных в свободные. Целевую функцию при этом принято записывать в две строки - основная и дополнительная (М-строка) ее составляющие:

$$\begin{aligned} Z_{\min} - c^T x - \\ - M \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_m) = 0; \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} F_{\max} - c^T x + \\ + M \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_m) = 0; \end{aligned}$$

3) решают задачу по М-строке, при этом искусственные переменные $y_1, y_2, ..., y_m$ выводят из базиса и делают их свободными. Обратно в базис их не возвращают, поэтому соответствующие столбцы симплекс - таблицы вычеркивают и дальше не рассматривают.

4) Все элементы таблицы заполняются обычным образом.

5) после перевода всех искусственных переменных $y_1, y_2, ..., y_m$ в свободные, получаем первое базисное решение. Все элементы в М-строке обращаются в ноль и ее отбрасывают.

6) далее задачу решают обычным симплекс-методом.

Пример:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 26 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases} \qquad z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$

Перейдем к каноническому виду, вводя вспомогательные переменные:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 26 \\ x_{1,2,3,4} \geq 0 \end{cases} \qquad z - 2x_1 - 3x_2 = 0;$$

Базис явно не выделяется, поэтому введем искусственные переменные:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 + y_2 = 26 \\ x_{1-4} \geq 0 \\ y_{1,2} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 8 - (x_1 + x_2 - x_3) \\ y_2 = 26 - (2x_1 + 4x_2 - x_4) \end{cases}$$

$$y_1 + y_2 = 34 - (3x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4)$$

Составим новую целевую функцию:

$$Z = z + M \cdot (y_1 + y_2) = 2x_1 + 3x_2 + M\left(34 - (3x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4)\right);$$

$$Z - (2x_1 + 3x_2) +$$

$$+M(3x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4) = M \cdot 34; \qquad Z \to \min$$

Составим симплекс-таблицу 1.

f \ b	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
y_1	1	1	-1	0	8
y_2	2	4	0	-1	26
z	-2	-3	0	0	0
M	3	5	-1	-1	34

Решение на min не оптимально, поскольку в М-строке есть положительные элементы. Выбираем разрешающим столбец с наибольшим положительным числом.

Разрешающую строку выбираем по отношениям: $\min = \left\{\frac{8}{1}; \frac{26}{4}\right\} = \frac{26}{4}$

Переходим к симплекс - таблице №2. Столбец, содержащий искусственную переменную, вычеркиваем.

f \ b	x_1	y_2	x_3	x_4	b_i
y_1	2/4	-1/4	-1	1/4	6/4
x_2	2/4	1/4	0	-1/4	26/4
z	-2/4	3/4	0	-3/4	78/4
M	2/4	-5/4	-1	1/4	6/4

$$\min = \left\{\frac{6}{2}; \frac{26}{2}\right\} = 3$$

Переходим к симплекс – таблице №3: Столбец, содержащий искусственную переменную, вычеркиваем.

b \ f	y_1	x_3	x_4	b_i
x_1	2	-2	1/2	3
x_2	-1	1	0	5
z	1	-1	-1/2	21
~~M~~	~~-1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~

Так как в М-строке получили все нули, то вычеркиваем М-строку. Мы получили ***первое базисное решение***:

b \ f	x_3	x_4	b_i
x_1	-2	1/2	3
x_2	1	0	5
Z	-1	-1/2	21

Так как задача решается на минимум, а в строке z все коэффициенты отрицательные, то ***это базисное решение является и оптимальным***:

$$x^* = (3;5;0;0); \qquad Z^*_{\min} - x_3 - 1/2\,x_4 = 21.$$

Альтернатива (если правильно выбран базис)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 26 \\ x_{1,2,3,4} \ge 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + 8 \\ 2x_1 + 4x_2 = x_4 + 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases}(2-4)x_1 = x_4 + 26 - 4(x_3+8) \\ (4-2)x_2 = x_4 + 26 - 2(x_3+8)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 - 0,5x_4 + 3 \\ x_2 = -x_3 + 0,5x_4 + 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 5\end{cases}$$

Задания для решения в аудитории

1. Производственному участку может быть запланировано к изготовлению на определённый плановый период времени два вида изделий: A и B . На производство единицы изделия A оборудование первого типа
используется *1*час, оборудование второго типа - *4* часа. На производство единицы изделия B оборудование первого типа используется *2* часа, оборудование второго типа - *2* часа.

Фонд полезного времени первого типа оборудования составляет *120* часов, второго типа оборудования – *240* часов. Отпускная цена единицы изделия A составляет *4* руб., а изделия B - *6* руб.

Спланировать выпуск изделий A и B при условии, что план должен быть выполнен в стоимостном выражении на сумму не менее *320* руб. и оборудование первого типа должно быть загружено минимально.

2. Симпатичная девушка узнала из дамского журнала, что для того чтобы волосы стали более шелковистыми, организм должен получать ежедневно не менее 40 г питательного вещества А, не менее 4 г питательного вещества Б и не менее 30 г питательного вещества В. Девушка знает, что в 1 кг яблок содержится 10 г вещества Б и 50 г вещества В, а в 1 кг огурцов содержится 40 г вещества А и по 20 г веществ Б и В. Цена яблок – 60 руб. за 1 кг, цена огурцов – 50 руб. за 1 кг. Требуется помочь девушке составить рацион, помогающий увеличить шелковистость волос и при этом имеющий наименьшую стоимость.

1.12. Двойственность в задачах линейного программирования

Каждой задаче линейного программирования соответствует двойственная или сопряженная задача.

<table>
<tr><th>Задача 1 (исходная)</th><th>Задача 2 (двойственная)</th></tr>
<tr><td>$$F_{\max} = c^T x$$ $$F_{\max} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$</td><td>$$Z_{\min} = b^T y$$ $$Z_{\min} = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$$</td></tr>
<tr><td>$$Ax \le b$$ $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_{1\ldots n} \ge 0 \end{cases}$$ Для предприятия П1 составить такой план выпуска продукции $x = \left(x_1, x_2, \ \ldots, x_n\right)^T$, при котором прибыль от реализации F будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не будет превосходить имеющиеся запасы b_i.</td><td>$$A^T y \ge c \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_m \\ y_{1\ldots m} \ge 0 \end{cases}$$ Предприятие П1 готово продать все ресурсы при условии, что стоимость ресурсов, затрачиваемых на производство каждого товара, будет не меньше цены реализации этого товара. Предприятие П2 готово купить ресурсы на этих условиях, но при этом желает найти такой набор цен $y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_m\right)^T$ на ресурсы, при котором общая стоимость сделки Z для П2 будет минимальной.</td></tr>
</table>

$$I\begin{cases} Ax \le b \\ F_{\max} = c^T x \end{cases} \qquad \begin{cases} y^T A \ge c^T \\ Z_{\min} = y^T b \end{cases} \Rightarrow II\begin{cases} A^T y \ge c \\ Z_{\min} = b^T y \to \min \end{cases} \tag{28}$$

Свойства двойственных задач:

1. В первой задаче ищется $\max$ целевой функции, а в другой $\min$.
2. Коэффициенты при переменных целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи.
3. Каждая из задач задана в стандартной форме.
4. Матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений являются транспонированными друг другу.
5. Число неравенств m в первой задаче, совпадает с числом переменных в другой задаче.
6. Условия неотрицательных переменных присутствуют в обеих задачах.

Алгоритм составления двойственной задачи:

1. Привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному смыслу. Для этого неравенства, в которых данные требования не выполняются, умножают на (-1).
2. Составить расширенную матрицу исходной задачи: $A_1 = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c^T & F_{\max} \end{array}\right)$;
3. Транспонировать полученную матрицу $A_2 = \left(\begin{array}{c|c} A^T & c \\ \hline b^T & Z_{\min} \end{array}\right)$;

4. Сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы и условии неотрицательных переменных.

Пример 1: Составить двойственную задачу

Исходная задача:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} Ax \le b; \\ F_{\max} = c^T x \end{matrix} \quad \Rightarrow A_1 = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c^T & F_{\max} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 18 \\ 2 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 21 \\ \hline 2 & 3 & F_{\max} \end{array} \right)$$

$$F_{\max} = 2x_1 + 3x_2$$

Двойственная задача:

$$A_2 = \left(\begin{array}{c|c} A^T & c \\ \hline b^T & Z_{\min} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 18 & 16 & 5 & 21 & Z_{\min} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 3 \\ y_{1,2,3,4} \ge 0 \end{cases}$$

$$Z_{\min} = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4$$

Основное неравенство (первая теорема) теории двойственности

Для любых допустимых решений $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ справедливо неравенство

$$F_{\max}(x) \le Z_{\min}(y). \tag{29}$$

Оно получается, если умножить первые строки систем (28) на y^T слева и на x справа соответственно

$$y^T Ax \le y^T b = Z_{\min}; \quad y^T Ax \ge c^T x = F_{\max}; \Rightarrow F_{\max}(x) \le y^T Ax \le Z_{\min}. \tag{30}$$

Теорема 1. Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их целевых функций равны, т.е.

$$Z_{\min}(y^*) = y^{*T} Ax^* = F_{\max}(x^*) \quad \text{или} \quad Z_{\min}(y^*) = y^{*T} b = c^T x^* = F_{\max}(x^*). \tag{31}$$

Если целевая функция одной из задач неограниченна, то условия другой задачи противоречивы, следовательно, оптимального плана нет.

Вторая теорема двойственности (о соответствии переменных) определяет условия дополняющей нежесткости.

Назовем исходные векторы x_n и y_m размерностей n и m соответственно *основными*. Введением *дополнительных* неотрицательных векторов переменных $\tilde{x}_m$ и $\tilde{y}_n$ размерностей m и n соответственно, приведем системы ограничений задач (28) к каноническому виду

$$A_{m\times n} x_n \le b_m; \quad y_m^T A_{m\times n} \ge c_n^T; \tag{32}$$

$$A_{m\times n} x_n + \tilde{x}_m = b_m; \quad y_m^T A_{m\times n} - \tilde{y}_n^T = c_n^T.$$

Умножим выражения (32) на y_m^T слева и на x_n справа соответственно

$$\begin{aligned} y_m^T A_{m\times n} x_n + y_m^T \tilde{x}_m &= y_m^T b_m = Z_{\min}; \\ y_m^T A_{m\times n} x_n - \tilde{y}_n^T x_n &= c_n^T x_n = F_{\max}. \end{aligned} \quad (33)$$

Поскольку эти выражения справедливы для любых допустимых решений, то в силу (31) для оптимальных решений имеет место равенство скалярных произведений

$$y_m^{*T} \tilde{x}_m^* = -\tilde{y}_n^{*T} x_n^*,$$

которое может быть выполнено, для неотрицательных по определению компонент векторов, только при равенстве их нулю

$$y_m^{*T} \tilde{x}_m^* = \tilde{y}_n^{*T} x_n^* = 0. \quad (34)$$

Справедливы также выражения:

$$Z^*_{\min} = F^*_{\max} = y^{*T} A x^*. \quad (35)$$

Теорема 2. Между переменными существует соответствие

(n - количество неизвестных; m - количество ограничений)

$$\dim(x) = \dim(\tilde{y}) = n; \quad \dim(\tilde{x}) = \dim(y) = m.$$

$$\dim(x_B) = \dim(y_F) = n; \quad \dim(x_F) = \dim(y_B) = m.$$

$$\begin{array}{llllll} x^T = (x_1 & x_2 & \dots & x_n); & \tilde{x}^T = (x_{n+1} & x_{n+2} \dots x_{n+m}); \\ \quad\;\; \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \quad\;\; \updownarrow \quad\; \updownarrow \quad \dots \quad \updownarrow \\ \tilde{y}^T = (y_{n+1} & y_{n+2} & \dots & y_{n+m}); & y^T = (y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m). \end{array}$$

При этом (см.(34)) *положительным компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи и наоборот.*

На основании (33) и (34) эту теорему можно сформулировать несколько иначе.

Коэффициентами в выражениях для оптимальных целевых функций являются* (33)*:

для $F^*_{\max}(x_F)$ - значения базисного вектора $-y_B^*$

$$F^*_{\max}(x_F) = y^{*T}Ax^* - y_B^T x_F = c^T x_B, \tag{36}$$

для $Z^*_{\min}(y_F)$ - значения базисного вектора x_B^*

$$Z^*_{\min}(y_F) = y^{*T}Ax^* + y_F^T x_B = y_B^T b. \tag{37}$$

Решить задачу примера 1.

Введением векторов дополнительных неотрицательных переменных $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ приведем задачи к каноническому виду (32)

$$\begin{cases} \tilde{x} + Ax = b \\ F_{\max} - c^T x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{y}^T = y^T A - c^T \\ Z_{\min} = y^T b \end{cases} \tag{38}$$

Здесь $\dim(A) = m \times n = 4 \times 2$; $\dim(x) = \dim(\tilde{y}) = n = 2$; $\dim(y) = \dim(\tilde{x}) = m = 4$.

Исходная задача в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_{d1} = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_{d2} = 16 \\ x_2 + x_{d3} = 5 \\ 3x_1 + x_{d4} = 21 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \\ x_{d3} \\ x_{d4} \\ F_{\max} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \\ 5 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\max} = 2x_1 + 3x_2 \qquad F_{\max} - 2x_1 - 3x_2 = 0$$

Двойственная задача в развернутом виде:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 3 \\ y_{1,2,3,4} \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 - y_{d1} = 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 - y_{d2} = 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} y_{d1} \\ y_{d2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Z_{\min} = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \qquad Z_{\min} = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \qquad Z_{\min} = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4$$

Учитывая соответствие между переменными, на основании (38)

$$\begin{array}{cccccccc} x^T = (x_1 & x_2); & \tilde{x}^T = (x_{d1} & x_{d2} & x_{d3} & x_{d4}) \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \tilde{y}^T = (y_{d1} & y_{d2}); & y^T = (y_1 & y_2 & y_3 & y_4) \end{array}$$

составим исходную симплекс-таблицу. Здесь, по-прежнему, толстые линии соответствуют знаку "=" равно.

Выполняя обычные итерации симплекс-метода, получим оптимальные решения сразу двух задач.

	x1	x2		b
y1	1	3	<=	18
y2	2	1	<=	16
y3	0	1	<=	5
y4	3	0	<=	21
	>=	>=		= Zmin
Fmax =	2	3		0
	c1	c2		

f\b		yd1	yd2	Zmin	т.O
	b\f	x1	x2	bi	
y1	xd1	1	3	18	6
y2	xd2	2	1	16	16
y3	xd3	0	1	5	5
y4	xd4	3	0	21	
Fmax	-cj	-2	-3	0	

f\b		yd1	y3	Zmin	т.A
	b\f	x1	xd3	bi	
y1	xd1	1	-3	3	3
y2	xd2	2	-1	11	5,5
yd2	x2	0	1	5	#ДЕЛ/0!
y4	xd4	3	0	21	7
Fmax	-cj	-2	3	15	

f\b		y1	y3	Zmin	т.B
	b\f	xd1	xd3	bi	
yd1	x1	1	-3	3	-1
y2	xd2	-2	5	5	1
yd2	x2	0	1	5	5
y4	xd4	-3	9	12	1,333333
Fmax	-cj	2	-3	21	

f\b		y1	y2	Zmin	т.C
	b\f	xd1	xd2	bi	
yd1	x1	- 1/5	3/5	6	
y3	xd3	- 2/5	1/5	1	
yd2	x2	2/5	- 1/5	4	
y4	xd4	3/5	-1 4/5	3	
Fmax	-cj	4/5	3/5	24	

$$\begin{pmatrix} x^* \\ \tilde{x}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_{d1} \\ x_{d2} \\ x_{d3} \\ x_{d4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} y^* \\ \tilde{y}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \hline y_{d1} \\ y_{d2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$y^{*T}\tilde{x}^* = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0; \qquad \tilde{y}^{*T} x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

В соответствии с (31)

$$Z^*_{\min} = F^*_{\max} = y^{*T} A x^* = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 24;$$

$$Z_{\min}\left(y^*\right)=y^{*T}b=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\16\\5\\21\end{pmatrix}=24; \quad F_{\max}\left(x^*\right)=c^T x^*=\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=24.$$

В соответствии с (36), (37) и последней симплекс-таблицей

$$F^*_{\max}\left(x_F\right)=y^{*T}Ax^*-y_B^T x_F=24-\frac{4}{5}x_{d1}-\frac{3}{5}x_{d2}$$

$$Z^*_{\min}\left(y_F\right)=y^{*T}Ax^*+y_F^T x_B=24+6y_{d1}+y_3+4y_{d2}+3y_4$$

1.13. Экономические приложения двойственных оценок

Компоненты оптимального решения двойственной задачи называются ***двойственными оценками*** *исходной задачи.* Академик Л.В.Канторович назвал их ***объективно обусловленными оценками*.**

Для выяснения смысла этих оценок вернемся к задаче I об использовании ресурсов и двойственной ей задаче II (см. примеры 1 и 2). Компоненты оптимальных решений этих задач представлены в таблице.

Компоненты оптимального решения исходной задачи I					
Число единиц продукции		Остатки ресурсов, единиц			
P_1	P_2	S_1	S_2	S_3	S_4
$x_1^* = 6$	$x_2^* = 4$	$x_3^* = 0$	$x_4^* = 0$	$x_5^* = 1$	$x_6^* = 3$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$y_5^* = 0$	$y_6^* = 0$	$y_1^* = 4/5$	$y_2^* = 3/5$	$y_3^* = 0$	$y_4^* = 0$
Превышение затрат на ресурсы над ценой реализации		Объективно обусловленные оценки ресурсов (условные цены ресурсов)			
Компоненты оптимального решения двойственной задачи II					

Экономический смысл дополнительных переменных

Дополнительные переменные исходной задачи $\tilde{x}_m = \left(x_{d1}, x_{d2}, x_{d3}, x_{d4}\right)^T$, согласно выражению (32) $\tilde{x}_m = b_m - A_{m\times n}x_n$, определяют разность между запасами b_i ресурсов и их потреблением, т.е. выражают *остатки ресурсов.*

Дополнительные переменные двойственной задачи $\tilde{y}_n^T = \left(y_{d1}, y_6\right)$, в соответствии с (32) $\tilde{y}_n^T = y_m^T A_{m\times n} - c_n^T$, есть разность между стоимостью ресурсов, затрачиваемых для производства из них единицы продукции, и ценой реализации c_j готовой продукции, т.е. выражают *превышение затрат над ценой (издержки реализации) или прибыль при продаже ресурсов.*

По оптимальному плану в исходной задаче следует производить оба вида продукции ($x_1^* = 6$, $x_2^* = 4$), значит разность между стоимостью ресурсов, затрачиваемых на их производство, и стоимостью реализации готовых изделий - издержки реализации - равны нулю ($y_{d1}^* = 0, y_{d2}^* = 0$). Производить такие товары выгодно.

В оптимальный план производства могут попасть только неубыточные в производстве виды продукции.

Объективно обусловленные оценки ресурсов

Ресурсы S_1, S_2 по оптимальному плану полностью использованы ($x_{d1}^* = 0$, $x_{d2}^* = 0$), они дефицитные, а соответствующие ограничения по b_1, b_2 - активные. Увеличение запасов b_1 или b_2 приведет к увеличению прибыли *F*, поэтому оценки этих ресурсов больше нуля ($y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$). Ресурсы b_3, b_4 не полностью используются в оптимальном плане, они имеются в избытке ($x_{d3}^* = 1$, $x_{d4}^* = 3$). Увеличение запасов этих недефицитных b_3, b_4 ресурсов не изменит угловую точку в ОДР и не приведет к увеличению прибыли *F*, поэтому объективно обусловленные оценки этих ресурсов нулевые ($y_3^* = 0, y_4^* = 0$).

Таким образом, *объективно обусловленные оценки ресурсов определяют степень дефицитности ресурсов: по оптимальному плану производства дефицитные (т.е. полностью используемые) ресурсы получают положительные оценки, а недефицитные — нулевые.*

1. Чувствительность решения ЗЛП к изменению запасов ресурсов Δb_i

Объективно обусловленные оценки ресурсов позволяют также оценить изменения объема выручки, вызванные малыми изменениями запасов ресурсов.

Это утверждение основано на следующих соображениях. Придадим малые приращения имеющимся запасам ресурсов Δb_i, такие малые, чтобы оптимум в ОДР не перешел в другую угловую точку. Тогда в соответствии с (31)

$$y^{*T} \cdot \Delta b = \Delta F_{\max}\left(x^*\right),$$

откуда в пределе получим

$$y_i^* = \lim_{\Delta b_i \to 0} \frac{\Delta F_{\max}\left(x^*\right)}{\Delta b_i} = \frac{\partial F_{\max}\left(x^*\right)}{\partial b_i}. \qquad (39)$$

Объективно обусловленные оценки ресурсов показывают, на сколько денежных единиц изменится максимальная прибыль (выручка) от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на одну единицу.

Пример. Для рассматриваемой задачи были получены объективно обусловленные оценки ресурсов: $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5,\ y_3^* = 0, y_4^* = 0$.

b \ f		y_1	y_2	$Z_{\min}$
	f \ b	x_{d1}	x_{d2}	b_i
y_{d1}	x_1	-1/5	3/5	6
y_3	x_{d3}	-2/5	1/5	1
y_{d2}	x_2	2/5	-1/5	4
y_4	x_{d4}	3/5	-9/5	3
$F_{\max}$	$-c_j$	4/5	3/5	24

В соответствии с (39) и последней симплекс-таблицей, при увеличении запаса ресурса b_1 на единицу (уменьшении остатка $x_{d1} = -1$), прибыль F увеличится на 4/5 руб. При этом в оптимальном плане уменьшится производство x_1 на 1/5, а производство x_2 увеличится на 2/5. Остатки ресурсов $b_3\left(x_{d3}\right)$ уменьшатся на 2/5, а остатки $b_4\left(x_{d4}\right)$ - увеличатся на 3/5.

Аналогично по столбцу y_2 проводится анализ изменения запасов ресурса b_2. При изменении запасов ресурсов b_3 или b_4 прибыль F не изменится, т.к. их оценки нулевые.

Прослеживается полная аналогия двойственных оценок с оценками ресурсов, при использовании графического метода.

2. Интервалы устойчивости двойственных оценок (вариации b)

Формула (39) имеет место лишь тогда, когда при изменении запасов ресурсов b_i значения их оценок y_i^* остаются неизменными. Поэтому необходимо определить интервалы изменения ресурсов $(b_i - \Delta b_i^H, b_i + \Delta b_i^B)$ - устойчивости двойственных оценок.

$$A_B x_B + A_F x_F = b; \quad x_B + A_B^{-1} A_F x_F = A_B^{-1} b;$$

где A_B - матрица базиса оптимального плана (столбцы).

Пусть $A_B^{-1} = D$, тогда из условия неотрицательности компонент базисного вектора получим формулы для вычисления нижней и верхней границ интервала устойчивости двойственных оценок [Кузнецов А.В.]:

$$x_B + \Delta x_B = A_B^{-1}\left(b + \Delta b\right) = x_B + A_B^{-1}\Delta b \geq 0$$

$$x_B \geq -A_B^{-1}\Delta b; \qquad x_{Bi} \geq -d_{ij} \cdot \Delta b_j; \qquad (b_i - \Delta b_i^H, b_i + \Delta b_i^B) \tag{40}$$

$$\Delta b_j^H = \min_{d>0}\left\{\frac{x_{Bi}}{d_{ij}}\right\}; \Delta b_j^B = \min_{d<0}\left\{\frac{x_{Bi}}{\left|d_{ij}\right|}\right\}$$

Пример. Для рассматриваемого примера 1 составим матрицу Ab *из столбцов* матрицы A, соответствующих компонентам *базисного* вектора x, и найдем обратную ей матрицу:

Ab=

x1	xd3	x2	xd4
1	0	3	0
2	0	1	0
0	1	1	0
3	0	0	1

invAb=D=

x1	xd3	x2	xd4
- 1/5	3/5	0	0
- 2/5	1/5	1	0
2/5	- 1/5	0	0
3/5	-1 4/5	0	1

Используя $x_B \ge -A_B^{-1}\Delta b$, найдем $\Delta b_j^H = \min\limits_{d>0}\left\{\dfrac{x_{Bi}}{d_{ij}}\right\}; \Delta b_j^B = \min\limits_{d<0}\left\{\dfrac{x_{Bi}}{|d_{ij}|}\right\}$ интервал устойчивости оценки y_1:

			db1	db2	db3	db4
x1	6		1/5	- 3/5	0	0
xd3	1	>=	2/5	- 1/5	-1	0
x2	4		- 2/5	1/5	0	0
xd4	3		- 3/5	1 4/5	0	-1

	30	-10	inf	inf
	2,5	-5	-1	inf
db=	-10	20	inf	inf
	-5	1,666667	inf	-3

	b1	b2	b3	b4
Min	13	11	4	18
Nom	18	16	5	21
Max	20,5	17,66667	inf	inf

$$\Delta b_1^H = \min_{d>0}\left\{\frac{4}{2/5};\frac{3}{3/5}\right\} = \min_{d>0}\left\{10;\frac{15}{3}\right\} = 5$$

$$\Delta b_1^B = \min_{d<0}\left\{\frac{6}{1/5};\frac{1}{2/5}\right\} = \min_{d<0}\left\{30;\frac{5}{2}\right\} = \frac{5}{2}$$

$$\left(b_1 - \Delta b_1^H; b_1 + \Delta b_1^B\right) = \left(18-5;\ \ 18+2,5\right) = \left(13;\ \ 20,5\right)$$

Определим интервал устойчивости оценки y_2:

$$\Delta b_2^H = \min_{d>0}\left\{\frac{6}{3/5};\frac{1}{1/5}\right\} = \min_{d>0}\{10;5\} = 5;$$

$$\Delta b_1^B = \min_{d<0}\left\{\frac{4}{1/5};\frac{3}{9/5}\right\} = \min_{d<0}\left\{20;\frac{15}{9}\right\} = \frac{5}{3}.$$

$$\left(b_2 - \Delta b_2^H; b_2 + \Delta b_2^B\right) = \left(16-5;\ \ 16+\frac{5}{3}\right) = \left(11;\ \ 17\frac{2}{3}\right).$$

Аналогично определяются интервалы устойчивости оценок y3 и y4:

$\left(b_3 - \Delta b_3^H; b_3 + \Delta b_3^B\right) = \left(4-1;\ \ 4+\text{inf}\right) = \left(3;\ \ \text{inf}\right)$; $\left(b_4 - \Delta b_4^H; b_4 + \Delta b_4^B\right) = \left(18-3;\ \ 18+\text{inf}\right) = \left(15;\ \ \text{inf}\right)$.

3. ***Чувствительность решения ЗЛП к изменению запасов ресурсов*** Δc_i

Непосредственной подстановкой элементов вектора $c_i + \Delta c_i$ в выражение для целевой функции получим $\Delta F = \Delta c_i \cdot x_i$. Формула (41) имеет место лишь тогда, когда угловая точка ОДР остается неизменной при изменении Δc_i.

4. Интервалы устойчивости оптимального плана: dc (вариация с)

Определим интервалы изменения коэффициентов целевой функции $(c_i - \Delta c_i^H, c_i + \Delta c_i^B)$ - устойчивости оптимального плана.

$$y^T A \ge c^T; \quad y^T A - \tilde{y}^T \ge c^T; \quad y^T A_B + \tilde{y}^T A_{\tilde{y}} = c^T; \tag{41}$$

Пусть $A_B^{-1} = D$, где A_B - матрица, составленная *из строк* исходной матрицы А, соответствующим ненулевым (базисным) оценкам. Тогда из условия неотрицательности компонент вектора двойственных оценок получим формулы для вычисления нижней и верхней границ интервала устойчивости оптимального плана:

$$y_B^T + y_F^T A_F A_B^{-1} = c^T A_B^{-1}$$

$$y_B^T + \Delta y_B^T = \left(c^T + \Delta c^T\right) A_B^{-1} = y_B^T + \Delta c^T A_B^{-1} \ge 0$$

$$y_j \ge \Delta c_i^H \cdot d_{ij}; \qquad y_j \ge -\Delta c_i^B \cdot d_{ij};$$

$$\Delta c_i^H \le \frac{y_j}{d_{ij}}, \quad d_{ij} > 0; \qquad \Delta c_i^B \le \frac{y_j}{\left|d_{ij}\right|}, \quad d_{ij} < 0;$$

$$\Delta c_i^{\text{Н}} = \min_{d>0}\left\{\frac{y_j}{d_{ij}}\right\}; \qquad \Delta c_i^{\text{В}} = \min_{d<0}\left\{\frac{y_j}{\left|d_{ij}\right|}\right\}. \qquad (42)$$

Пример. Для рассматриваемого примера 1 составим матрицу Ab *из строк* матрицы А, соответствующих компонентам *базисного* вектора *y*, и найдем обратную ей матрицу

$$A_B = \begin{array}{c} y1 \\ y2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = A_B^{-1} = \begin{array}{c} y1 \\ y2 \end{array} \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

	y1	y2		
	4/5	3/5		
	>=	>=		
dc1	1/5	- 3/5	4	-1
dc2	- 2/5	1/5	-2	3

	min	nom	max
c1	1	2	6
c2	1	3	6

Интервал устойчивости компоненты x_1 при изменении Δc_1 :

$$\Delta c_1^{\text{Н}} = \min_{d>0}\left\{\frac{3/5}{3/5}\right\} = 1; \quad \Delta c_1^{\text{В}} = \min_{d<0}\left\{\frac{4/5}{1/5}\right\} = 4; \quad \left(c_1 - \Delta c_1^{\text{Н}}, c_1 + \Delta c_1^{\text{В}}\right) = (2-1;\ \ 2+4) = (1;\ \ 6);$$

Определим интервал устойчивости компоненты x_2 при изменении Δc_2 :

$$\Delta c_2^{\text{Н}} = \min_{d>0}\left\{\frac{4/5}{2/5}\right\} = 2; \quad \Delta c_2^{\text{В}} = \min_{d<0}\left\{\frac{3/5}{1/5}\right\} = 3; \quad \left(c_2 - \Delta c_2^{\text{Н}}, c_2 + \Delta c_2^{\text{В}}\right) = (3-2;\ \ 3+3) = (1;\ \ 6).$$

5. Целесообразность включения в план производства новых видов продукции

Определяется по соотношению суммарной стоимости ресурсов $\sum a_{ik} y_i$, затрачиваемых на производство единицы нового k-го продукта, и предполагаемой прибылью c_k от реализации этого продукта.

Очевидно, должно выполняться условие

$$c_k - \sum a_{ik} y_i \geq 0. \tag{43}$$

Пример. Допустим, что в рассматриваемой задаче I, для которой был получен оптимальный план выпуска продукции P_1 и P_2, появилась возможность выпуска еще одного вида продукции P_3. Затраты ресурсов на единицу продукции P_3 и прибыль от единицы продукции составляют:

$$\begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad c_3 = 3.$$

b \ f		y_1	y_2	$Z_{\min}$
	f \ b	x_{d1}	x_{d2}	b_i
y_{d1}	x_1	-1/5	3/5	6
y_3	x_{d3}	-2/5	1/5	1
y_{d2}	x_2	2/5	-1/5	4
y_4	x_{d4}	3/5	-9/5	3
$F_{\max}$	$-c_j$	4/5	3/5	24

Определить рентабельно ли производство P_3? Если нет, то какой должна быть прибыль от единицы продукции P_3 (цена), чтобы ее производство было рентабельным?

Решение. Сопоставим дополнительные затраты на ресурсы в расчете на единицу продукции P_3 с ценой ее реализации. Затраты (доход при продаже ресурсов)

$$a_{13} y_1^* + a_{23} y_2^* + a_{33} y_3^* + a_{43} y_4^* = 3 \cdot 4/5 + 2 \cdot 3/5 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 3{,}6 \text{ руб.},$$

больше цены реализации продукции $c_3 = 3$ руб., yd3<0, поэтому выпуск продукции P_3 не следует включать в план выпуска, и необходимость повторного решения задачи в изменившихся условиях отпадает. А чтобы производство продукции P_3 стало рентабельным, очевидно, ее цена должна составлять не менее 3,6 руб.

Задания для решения в аудитории

1. Для задачи, состоящей в определении максимального значения функции $Z = 2x_1 + 7x_2$ при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ \quad x_1 + \quad x_2 \le 8 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

составить двойственную задачу и найти решение обеих задач геометрически.

2. Для производства трех видов изделий *A*, *B* и *C* используется три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в количестве, соответственно не большем 180, 210 и 244 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в таблице.

Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается ее максимальная стоимость, и получить двойственную оценку каждого из видов сырья, используемых для производства продукции.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	*B*	C
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Цена единицы продукции (руб.)	10	14	12